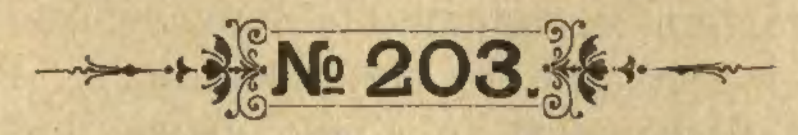
XVII Сем. 1-го декабря 1894 г. № 11.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



Содержаніе: П. Л. Чебышевъ. Проф. *А. Васильева.* — Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго (продолженіе). *В. Кагана.* — По поводу статей „Объ учебникахъ алгебры“ г. Герна и „О биномѣ Ньютона“ г. Попруженко. *К. Чеховича.* — Письма въ редакцію: Проф. *О. Хвольсона* и проф. *Ѳ. Шведова.* — По поводу моей рецензіи. *Безличнаго* (Э. К. Шпачинскаго). — Задачи №№ 138 — 143. — Рѣшенія задачъ 3-ей сер. №№ 55, 56, 57, 64, 66, 72 и и 2-ой сер. № 590. — Обзоръ научныхъ журналовъ. *Д. Е.* — Библіографическій листокъ новѣйшихъ русскихъ изданій. — Библіографическій листокъ новѣйшихъ англійскихъ изданій.—Объявленія.

† П. Л. Чебышевъ*).

Великій русскій математикъ, память котораго чествовалась недавно въ различныхъ физико-математическихъ обществахъ, еще въ раннемъ дѣтствѣ подобно большинству живыхъ дѣтей, обнаруживалъ особенную любовь къ устройству механическихъ приборовъ. Развитію этой склонности мѣшаетъ у дѣтей, принужденныхъ проходить общую школу, преобладающее въ этой школѣ отвлеченное и словесное направленіе занятій. Чебышевъ получилъ домашнее воспитаніе его любовь къ механическимъ знаніямъ могла развиваться безпрепятственно. Талантливый мальчикъ при первыхъ урокахъ по геометріи почувствовалъ связь предмета съ своими любимыми мельницами и другими игрушками. „Это мнѣ нужно“, рѣшилъ мальчикъ и съ жаромъ принялся за изученіе геометріи. Такъ опредѣлились еще въ раннемъ дѣтствѣ склонности и направленіе ума знаменитаго математика.

Ученая дѣятельность Чебышева началась вскорѣ послѣ окончанія имъ курса двумя замѣтками по теоріи кратныхъ интеграловъ и теоріи сходимости строкъ, помѣщенными въ лучшихъ математическихъ журналахъ Франціи и Германіи. Еще большее вниманіе обратилъ на себя „опытъ элементарнаго изложенія теоріи вѣроятностей“, написанный имъ для того, чтобы удовлетворить просвѣщенному желанію попечителя московскаго округа графа Строганова.

---

*) Съ согласія автора перепечатываемъ настоящую статью изъ № 319 „Волжскаго Вѣстника“ за 1894 годъ. *Ред.*

Приглашенный въ 1845 г. занять кафедру въ с.-петербургскомъ университетѣ Чебышевъ принимаетъ участіе въ изданіи сочиненій Эйлера по теоріи чиселъ и издаетъ свои классическіе мемуары по теоріи простыхъ чиселъ и свою прекрасную теорію сравненій. Мемуары Чебышева по теоріи простыхъ чиселъ сразу поставили его наравнѣ съ выдающимися математиками всего міра; но, обнаруживши свой математическій талантъ на одномъ изъ вопросовъ математики, представляющихъ громадный интересъ для математиковъ, но не имѣющихъ никакого прикладного значенія, молодой ученый оставляетъ вопросы подобнаго рода и, удовлетворяя склонностямъ своего ума, обращается къ созданію новыхъ методовъ математики, приспособленныхъ къ рѣшенію вопросовъ, имѣюшихъ значеніе въ приложеніяхъ. Избравъ себѣ новую область изслѣдованій, Чебышевъ до конца своей жизни идетъ по этому пути и его изслѣдованія доставляютъ ему славу одного изъ оригинальнѣйшихъ математиковъ; путь, избранный имъ, былъ притомъ такъ плодотворенъ, число вопросовъ, на немъ представляющихся, такъ велико, что Чебышевъ является создателемъ особой школы русскихъ математиковъ.

Новый рядъ вопросовъ и задачъ былъ поставленъ Чебышевымъ въ двухъ мемуарахъ 1853 и 1855 г.: „Theorie des mecanismes connus sous le nom des parallelogrammes“ и „О непрерывныхъ дробяхъ“. Въ этихъ мемуарахъ рѣшаются двѣ схожія по характеру задачи, хотя рѣшаются методами отличными.

Въ обоихъ мемуарахъ ставится вопросъ о нахожденіи приближенныхъ выраженій, наивозможно ближе и проще представляющихъ функціи.

Съ этихъ двухъ мемуаровъ начинается рядъ работъ въ своеобразномъ направленіи, рѣзко отличающемся отъ направленія другихъ современныхъ математиковъ, отъ общаго направленія математики XIX в. Введеніе комплекснаго числа въ теорію функцій, составляющее характеристическую черту математики XIX столѣтія, придаетъ чистой математикѣ стройность и законченность; имъ ставится математикѣ рядъ новыхъ задачъ. Но эти задачи въ большинствѣ случаевъ вызываются движеніемъ науки и не даютъ прямыхъ, непосредственныхъ отвѣтовъ на задачи практики.

Направленіе работъ Чебышева, напротивъ, можетъ быть характеризовано служеніемъ вопросамъ практики.

При рѣшеніи многихъ вопросовъ механикъ, астрономъ или физикъ не нуждается въ тѣхъ абстрактныхъ изслѣдованіяхъ о свойствахъ функцій и чиселъ, которыя составляютъ одну изъ задачъ математики; при окончательномъ рѣшеніи вопроса, когда требуется дать численныя выраженія, трансцедентная функція для удобства вычисленія замѣняется цѣлымъ полиномомъ или инымъ простымъ выраженіемъ; практика не знаетъ также различія между несоизмѣримымъ и дробнымъ числомъ, столь важнымъ для абстрактной математики.

Понятна поэтому важность для рѣшенія практическихъ вопросовъ методовъ, дающихъ приближенныя выраженія для функцій и вмѣстѣ съ тѣмъ дающихъ возможность опредѣлить предѣлъ неизбѣжной погрѣшности. Въ систематическомъ развитіи такихъ методовъ, приведшихъ его между прочимъ къ блестящимъ открытіямъ въ теоріи вѣроятностей,

Чебышевъ почти не имѣлъ предшественниковъ. Ближе всего къ его изслѣдованіямъ подходятъ изслѣдованія Понселе, давшаго линейныя формулы, замѣняющія съ большою степенью приближенія вычисленіе квадратныхъ корней изъ суммы и разностей квадратовъ.

Свой взглядъ на цѣли и задачи современной математики Чебышевъ высказалъ однажды въ разговорѣ со мною въ слѣдующей формѣ. „Математика", говорилъ онъ, пережила два періода; въ первый періодъ (делійская задача объ удвоеніи куба и пр.) задачи ставили боги; въ эпоху Паскаля, Ферманта и др. ихъ давали полубоги; теперь задачи ставитъ масса и ея нужды". Въ рѣчи, произнесенной въ 1856 г. и посвященной вопросу о черченіи географическихъ картъ, Чебышевъ подробно развилъ ту-же мысль.

Приведемъ это интересное мѣсто in extenso: „Сближеніе теоріи съ практикою даетъ самые благотворные результаты, и не одна только практика отъ этого выигрываетъ; сама наука развивается подъ вліяніемъ ея, оно открываетъ имъ новые предметы для изслѣдованія или новыя стороны въ предметахъ давно извѣстныхъ...

„Практическая дѣятельность человѣка представляетъ чрезвычайное разнообразіе и для удовлетворенія всѣхъ ея требованій, разумѣется недостаетъ наукѣ многихъ и различныхъ методъ. Но изъ нихъ особенную важность имѣютъ тѣ, которыя необходимы для рѣшенія различныхъ видоизмѣненій одной и той-же задачи, общей для всей практической дѣятельности человѣка: *Какъ располагать средствами своими для достиженія „возможности большей выгоды*".

Не довольствуясь выработкою новыхъ и оригинальныхъ методовъ, важныхъ для многихъ практическихъ приложеній и имъ самимъ приложенныхъ къ вопросамъ о параллелограммахъ, центробѣжныхъ регуляторахъ и другихъ механизмахъ, Чебышевъ прилагалъ свое остроуміе къ изобрѣтенію новыхъ приборовъ. Кресло-велосипедъ, посланное имъ на выставку въ Чикаго и многія другія интересныя механизмы останутся памятникомъ его изобрѣтательности; изобрѣтенная имъ ариѳметическая машина, основанная на непрерывномъ движеніи, лишена недостатковъ, обычныхъ другимъ машинамъ.

Ясный и живой умъ Чебышева отражался и въ его преподаваніи: съ захватывающимъ интересомъ слушались его лекціи.

Чебышевъ пользовался за границею славою, какая до него не выпадала на долю ни одному русскому ученому, несмотря на то, что большинство его работъ напечатано на русскомъ языкѣ и съ трудомъ доступно для пользованія. Пожелаемъ, чтобы быстрое изданіе его трудовъ сдѣлало ихъ возможно болѣе доступными русскимъ и иностраннымъ математикамъ. Въ недалекомъ будущемъ предвидится открытіе международныхъ математическихъ конгрессовъ; если на нихъ, какъ предполагается, данъ будетъ обзоръ успѣховъ математики въ XIX столѣтіи, то благодаря *Лобачевскому*, *Чебышеву* и его школѣ и *Остроградскому*, русская математика займетъ въ этомъ обзорѣ почетное мѣсто.

А. Васильевъ (Казань).

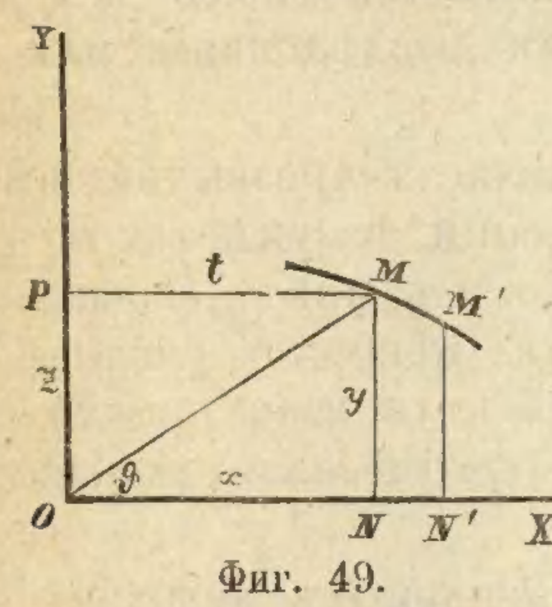
ОЧЕРКЪ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

VIII. Элементы аналитической геометріи.

Когда установлены основныя метрическія соотношенія плоской геометріи, дальнѣйшее развитіе геометрической системы можетъ слѣдовать уже чисто аналитическому пути. Для этого необходимо установить способы координированія точки въ пространствѣ и прежде всего на плоскости.



Фиг. 49.

Положимъ, что мы имѣемъ двѣ взаимно перпендикулярныя оси OX, OY и точку M. Изъ этой точки (фиг. 49) опускаемъ перпендикуляры MN и MP на оси. Обозначимъ отрѣзокъ ON черезъ x, NM черезъ y, OP черезъ z и MP черезъ t. Въ геометріи Евклида эти отрѣзки попарно равны и представляютъ собой одну систему прямолинейныхъ, ѳртогональныхъ, Декартовыхъ координатъ. Въ геометріи Лобачевскаго x и t, y и z не равны. Каждая пара отрѣзковъ представляетъ собой особую систему координатъ. Разсмотримъ ихъ по порядку.

Прежде всего очевидно, что отрѣзки x и y опредѣляютъ собой положеніе точки M. Ясно также, что любые два отрѣзка могутъ служить такими координатами въ томъ смыслѣ, что они всегда опредѣляютъ положеніе нѣкоторой дѣйствительной точки на плоскости. Эти координаты ортогональны, но не прямолинейны. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе

$$x = \text{Const.} = x_0$$

представляетъ собой прямую, перпендикулярную къ OX въ точкѣ X_0, отстоящей отъ O на разстояніи $OX_0 = x_0$. Уравненіе же

$$y = \text{Const.} = y_0$$

представляетъ собой геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на разстояніи y_0 отъ оси OX. Но мы уже знаемъ, что двѣ прямыя на плоскости Лобачевскаго либо пересѣкаются въ конечной или безконечно удаленной точкѣ, либо расходятся. Слѣдовательно, это геометрическое мѣсто на плоскости Лобачевскаго представляетъ собой кривую — линію равныхъ разстояній**). Пусть MM' безконечно малая дуга этой кривой.

---

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201 и 202.

**) Мы не входили въ подробное изслѣдованіе линій и поверхностей равныхъ разстояній потому, что Лобачевскій въ синтетической геометріи ихъ не касается. Но наиболѣе характерныя свойства этихъ образовъ будутъ указаны.

Тогда четырехугольникъ NMM'N' представляетъ собой четырехугольникъ Саккери. Площадь этого четырехугольника, по формулѣ XXX, равна 2δ, гдѣ δ представляетъ собой разность между $\frac{\pi}{2}$ и угломъ при верхнемъ основанiи. Такъ какъ площадь четыреугольника безконечно мала, то этотъ уголъ безконечно мало отличается отъ прямого и, слѣдовательно, обращается въ прямой уголъ, если мы замѣнимъ дугу MM' касательной въ точкѣ M. Поэтому координатныя линiи

$$x = \text{Const.}, \ y = \text{Const.}$$

ортогональны.

Отрѣзки z и t играютъ совершенно ту же роль; это тѣ-же самыя координаты, только иначе расположенныя. Когда мы опредѣляемъ положенiе точки координатами x и y, ось OY не играетъ никакой роли: положенiе точки M опредѣляется относительно прямой OX и точки O, на ней лежащей. Когда мы вмѣсто этого опредѣляемъ положенiе точки M координатами z и t, то разница заключается лишь въ томъ, что ось OX замѣняется осью OY.

Отрѣзки x и z представляютъ собой координаты прямолинейныя, но не ортогональныя. Въ самомъ дѣлѣ, уравненiя

$$x = x_0, \ y = y_0$$

представляютъ собой прямыя вида MP и MN, которыя пересѣкаются подъ острымъ угломъ PMN, ибо въ четырехугольникѣ OPMN остальные углы прямые. Сверхъ того не трудно обнаружить, что не всякiе отрѣзки z и x опредѣляютъ положенiе нѣкоторой точки на плоскости. Для того, чтобы два отрѣзка $z = z_0$ и $x = x_0$ опредѣляли положенiе точки на плоскости необходимо и достаточно, чтобы

$$\Pi(z_0) + \Pi(x_0) > \frac{\pi}{2}.$$

(Подъ отрѣзками z_0 и x_0 мы разумѣемъ въ этомъ неравенствѣ лишь абсолютное значенiе координатъ). Въ самомъ дѣлѣ пусть $z_0 = OP$ (фиг. 50). Изъ точки P проведемъ перпендикуляръ PL къ OY и изъ точки O прямую $OM \parallel PL$, такъ что $\angle POM = \Pi(z_0)$. Построимъ теперь отрѣзокъ $OQ = \xi$ такимъ образомъ, чтобы $\Pi(\xi) = \angle MOQ$, т. е. чтобы

$$\Pi(z_0) + \Pi(\xi) = \frac{\pi}{2}.$$

Фиг. 50.

Тогда прямая QN, перпендикулярная къ OX, параллельна прямымъ OM и PL; отрѣзки x_0 и ξ не опредѣляютъ никакой точки на плоскости. Впрочемъ, при извѣстныхъ соглашенiяхъ можно сказать, что они опредѣляютъ безконечно удаленную точку пересѣченiя параллельной PL и QN. Если же

$$\Pi(z_0) + \Pi(x_1) < \frac{\pi}{2},$$

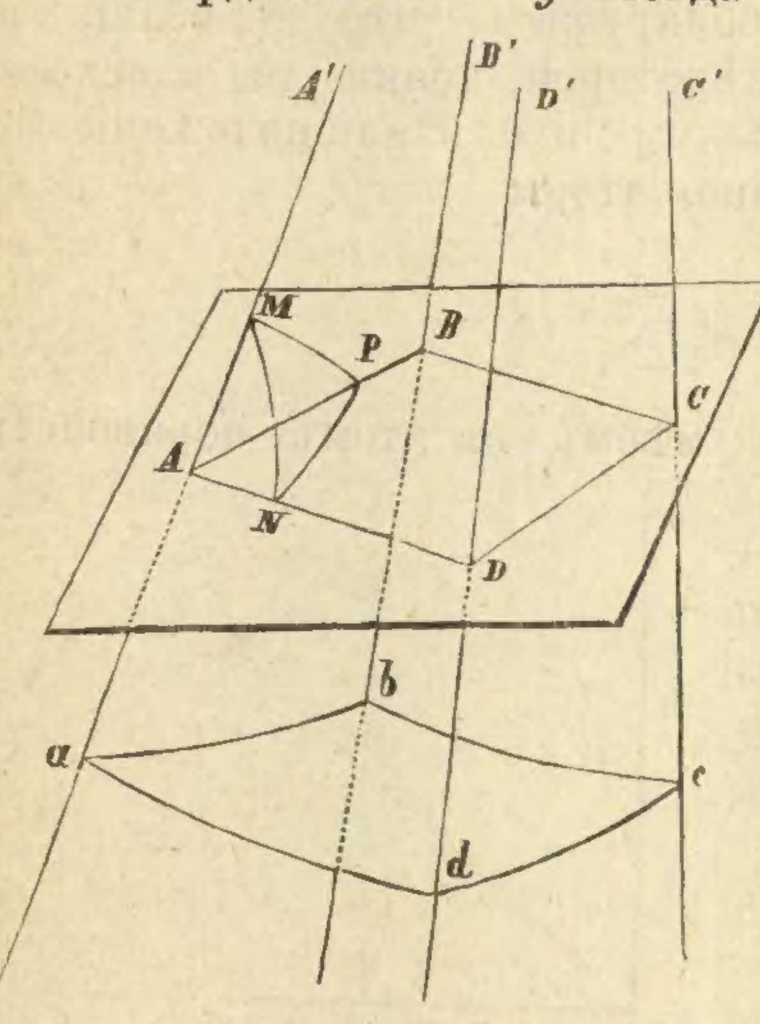
то $x_1 > \xi$. Отложимъ отрѣзокъ $OQ' = x_1$ и возставимъ перпендикуляръ $Q'N'$ къ оси OX; онъ очевидно лежитъ цѣликомъ по одну сторону прямой QN и потому не пересѣчетъ прямой PL, лежащей по другую сторону отъ нея. Координаты z_0 и x_1 не опредѣляютъ, слѣдовательно, точки на плоскости. Если, наоборотъ,

$$\Pi(z_0) + \Pi(x_0) > \frac{\pi}{2},$$

то $OQ_0 = x_0 < \xi$. Перпендикуляръ Q_0H встрѣчаетъ неизбѣжно прямую PL въ нѣкоторой точкѣ H, ибо иначе, проходя между двумя параллелями онъ былъ бы параллеленъ обѣимъ; этого быть не можетъ, ибо прямыя QH и QN перпендикулярны къ одной и той-же прямой. Координаты z_0 и x_0 опредѣляютъ собой положенiе точки H*).

Отрѣзки z и y не опредѣляютъ вполнѣ положенiя точки на плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, при $y > z$ не существуетъ точки, которая бы опредѣлялась этими координатами, потому что разстоянiе между прямыми PM и OX (фиг. 49) возрастаетъ постоянно и неопредѣленно по обѣ стороны отъ OУ; и именно поэтому при $y > z$ этимъ координатамъ отвѣчаютъ двѣ точки, симметрично расположенныя относительно оси OУ. Совершенно такимъ же образомъ обстоитъ дѣло съ координатами x и t. Это обстоятельство дѣлаетъ эти координаты вообще мало пригодными, хотя и не исключаетъ возможности пользоваться ими въ частныхъ случаяхъ.

Координаты t и y всегда опредѣляютъ собой положенiе точки на плоскости. Мы докажемъ это аналитически, именно мы обнаружимъ, что отрѣзки t и y опредѣляютъ собой однозначно абсиссу x всегда дѣйствительную. Это преобразованiе приводитъ насъ къ одной тригонометрической задачѣ, которую мы рѣшимъ отдѣльно, такъ какъ къ ней сводятся всѣ главнѣйшiе вопросы, которые мы имѣемъ въ виду разобрать въ настоящей главѣ. Задача эта заключается въ рѣшенiи четырехугольника ABCD (фиг. 51), въ которомъ два противоположныхъ угла ABC и ADC прямые. Мы обнаружимъ, что такой четырехугольникъ опредѣляется тремя изъ шести остальныхъ элементовъ. Обозначимъ стороны и углы четырехугольника слѣдующимъ образомъ:



Фиг. 51.

$$AB=a,\ BC=b,\ CD=c,\ DA=d,\ \angle BAD=A,\ \angle BCD=C. \qquad (1)$$

*) Этими координатами пользуется G. Escherich въ статьѣ: „Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung“. Sitzungsberichte der Wiener Academie. 69. Но на упомянутыя здѣсь условiя въ этой статьѣ не указано, что, какъ намъ кажется, отразилось и на самой статьѣ.

Изъ точки C возставимъ перпендикуляръ CC′ къ плоскости четырехугольника и изъ вершинъ A, B, D проведемъ прямыя AA′, BB′, DD′ параллельно CC′. При такихъ условіяхъ плоскости BB′CC′, D′DCC′ перпендикулярны къ плоскости четырехугольника; а прямыя AB и AD соотвѣтственно перпендикулярны къ этимъ плоскостямъ. Вслѣдствіе этого двугранные углы, имѣющіе ребрами прямыя AB и AD, измѣряются линейными углами B′BC и D′DC. Поэтому, обозначая двугранные углы ихъ ребрами, имѣемъ:

$$(BB') = \frac{\pi}{2}; (DD') = \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

$$(AD) = \angle D'DC = \Pi(c) \qquad (3)$$

$$(AB) = \angle B'BC = \Pi(b) \qquad (4)$$

$$(CC') = C. \qquad (5)$$

Если теперь представимъ себѣ какую нибудь предѣльную поверхность, для которой параллели нашей системы служатъ осями, то плоскости этихъ параллелей вырѣжутъ на ней четырехугольникъ $abcd$, въ которомъ сумма внутреннихъ угловъ равна 2π, такъ что

$$(\angle a + \angle b + \angle c + \angle d) = 2\pi$$

или иначе:

$$(AA') + (BB') + (CC') + (DD') = 2\pi.$$

Принимая во вниманіе уравненія (2) — (5), мы находимъ:

$$(AA') = \pi - C. \qquad (6)$$

Представимъ себѣ теперь сферу, имѣющую центромъ вершину A. Грани трегранного угла вырѣжутъ на сферѣ треугольникъ MNP; обозначая въ немъ стороны черезъ m, n и p, мы найдемъ

$$m = \smile NP = A$$

$$n = \smile MP = \angle A'AB = \Pi(a)$$

$$p = \smile MN = \angle A'AD = \Pi(d)$$

$$M = (AA') = \pi - C \qquad (\text{см. } 6)$$

$$N = (AD) = \Pi(c) \qquad (\text{см. } 3)$$

$$P = (AB) = \Pi(b) \qquad (\text{см. } 4).$$

Слѣдовательно шесть элементовъ a, b, c, d, A, C нашего четырехугольника удовлетворяютъ пятнадцати уравненіямъ, которыя получимъ, если въ уравненіяхъ сферическаго треухугольника, стороны котораго суть m, n и p, а углы M,N и P сдѣлаемъ подстановку:

$$\begin{bmatrix} m & n & p & M & N & P \\ A & \Pi(a) & \Pi(d) & \pi - C & \Pi(c) & \Pi(b) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Такъ что уравненія

$$\frac{\sin m}{\sin M} = \frac{\sin n}{\sin N} = \frac{\sin p}{\sin P}$$

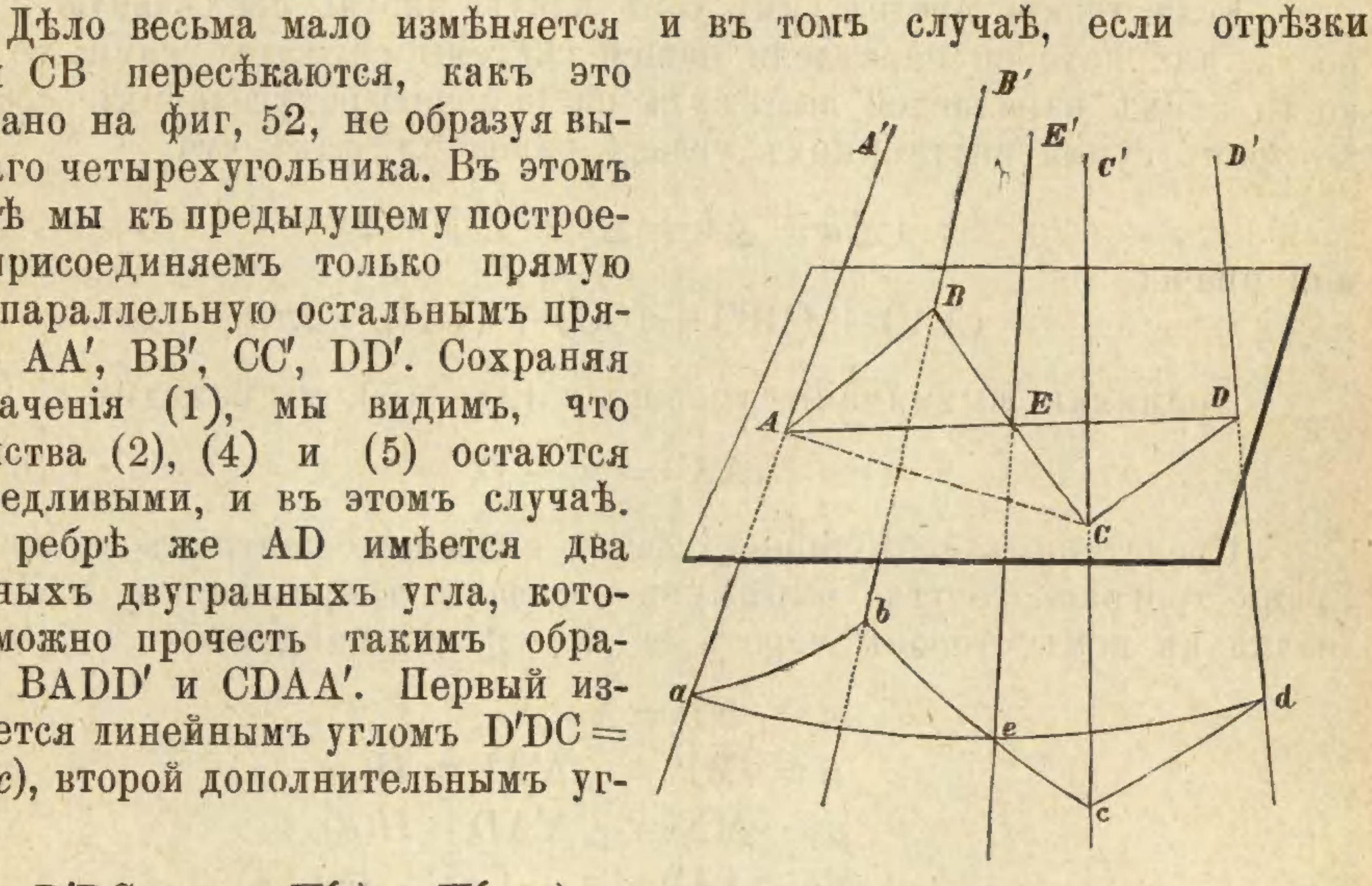
$$\cos m = \cos n \ \cos p + \sin m \ \sin p \ \cos M$$
$$\cos n = \cos m \cos p + \sin m \ \sin p \ \cos N$$
$$\cos p = \cos m \ \cos n + \sin m \ \sin n \ \cos P$$
$$\operatorname{cotg} n \ \sin m - \operatorname{cotg} N \ \sin P = \cos m \ \cos P$$
$$\operatorname{cotg} p \ \sin m - \operatorname{cotg} P \ \sin N = \cos m \cos N$$

даютъ:

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a'}{\sin c'} = \frac{\sin d'}{\sin b'} \qquad \text{XXXV } a)$$
$$\cos A = \cos a' \cos d' - \sin a' \sin d' \cos C \qquad \text{XXXV } b)$$
$$\cos a' = \cos A \ \cos d' + \sin A \ \sin d' \cos c' \qquad \text{XXXV } c)$$
$$\cos d' = \cos A \ \cos a' + \sin A \ \sin a' \ \cos b' \qquad \text{XXXV } d)$$
$$\operatorname{cotg} a' \sin A - \operatorname{cotg} c' \sin b' = \cos A \cos b' \qquad \text{XXXV } e)$$
$$\operatorname{cotg} d' \sin A - \operatorname{cotg} b' \sin c' = \cos A \cos c' \qquad \text{XXXV } f).$$

Дѣло весьма мало измѣняется и въ томъ случаѣ, если отрѣзки AD и CB пересѣкаются, какъ это показано на фиг, 52, не образуя выпуклаго четырехугольника. Въ этомъ случаѣ мы къ предыдущему построенію присоединяемъ только прямую EE′, параллельную остальнымъ прямымъ AA′, BB′, CC′, DD′. Сохраняя обозначенія (1), мы видимъ, что равенства (2), (4) и (5) остаются справедливыми, и въ этомъ случаѣ. При ребрѣ же AD имѣется два смежныхъ двугранныхъ угла, которые можно прочесть такимъ образомъ: BADD′ и CDAA′. Первый измѣряется линейнымъ угломъ $D'DC = \Pi(c)$, второй дополнительнымъ угломъ

$$\pi - D'DC = \pi - \Pi(c) = \Pi(-c).$$
(См. ур. XIX).



Фиг. 52.

Далѣе на предѣльной поверхности вмѣсто выпуклаго четырехугольника мы получимъ два прямоугольныхъ треугольника *acb* и *ced*. Ихъ углы находятся въ такомъ соотношеніи:

$$\angle a + \angle e = \frac{\pi}{2}, \ \angle c = \angle e = \frac{\pi}{2}, \ \angle a = \angle c.$$

Слѣдовательно, иначе:

$$(AA') = (CC') = C.$$

Итакъ, теперь въ сферическомъ треугольникѣ MNP имѣемъ:

$$m = A, \ n = \Pi(a), \ p = \Pi(d)$$
$$M = C, \ N = \Pi(-c), \ P = \Pi(b).$$

Слѣдовательно, чтобы получить въ этомъ случаѣ соотношенія между сторонами a, b, c, d и углами A и C нужно въ уравненіяхъ сферическаго треугольника совершить подстановку

$$\begin{bmatrix} m & n & p & M & N & P \\ A & \Pi(a) & \Pi(d) & C & \Pi(-c) & \Pi(b) \end{bmatrix}. \qquad (8)$$

При этихъ условіяхъ уравненія XXXV b), c) и e) примутъ такой видъ:

$$\cos A = \cos a' \cos d' + \sin a' \sin d' \cos C \qquad \text{XXXV } b')$$

$$\cos a' = \cos A \cos d' + \sin A \sin d' \cos(-c)' \qquad \text{XXXV } c')$$

$$\operatorname{cotg} a' \sin A - \operatorname{cotg}(-c)' \sin b' = \cos A \cos b' \qquad \text{XXXV } e')$$

и еще иначе

$$\cos a' = \cos A \cos d' - \sin A \sin d' \cos c' \qquad \text{XXXV } c'')$$

$$\operatorname{cotg} a' \sin A + \operatorname{cotg} c' \sin b' = \cos A \cos b'. \qquad \text{XXXV } e'')$$

Вообще изложенная теорема будетъ мало измѣняться, какъ бы ни были расположены четыре точки A, B, C и D, если только углы B и D будутъ прямые. Въ каждомъ частномъ случаѣ не трудно найти соотвѣтствующую подстановку. Мы разсмотрѣли тѣ случаи и привели тѣ уравненія, которыми намъ прійдется воспользоваться. Мы видимъ такимъ образомъ, что четырехугольникъ съ двумя противоположными прямыми углами опредѣляется тремя элементами, по крайней мѣрѣ настолько, насколько это можно сказать относительно сферическаго треугольника.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ПО ПОВОДУ СТАТЕЙ

„Объ учебникахъ алгебры“ г. Герна и „О биномѣ Ньютона“ г. Попруженко.

На страницахъ этого „Вѣстника“ отъ времени до времени появляются вполнѣ симпатичныя статьи, разбирающія методы преподаванія и достоинство учебниковъ для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній. Эти статьи даютъ возможность преподавателямъ ознакомиться съ достоинствомъ новыхъ учебниковъ, не пріобрѣтая ихъ; они нерѣдко даютъ упрощенные методы преподаванія, а также и облегченные выводы какихъ либо правилъ.—Къ числу такихъ статей относятся: „Объ учебникахъ алгебры“ г. Герна и „О биномѣ Ньютона“ г. Попруженко, помѣщенныя въ № 197 „Вѣстника“. Та и другая подали мнѣ поводъ сдѣлать къ нимъ дополненія.

а) Объ учебникахъ математики.

Г. Гернъ совершенно справедливо замѣчаетъ, что наши учебники алгебры, въ теперешнемъ ихъ видѣ, преслѣдуютъ троякую цѣль: они

должны служить учебниками при классномъ преподованіи, руководствомъ при самообученіи и методическимъ руководствомъ для преподавателей. Но то же самое можно сказать и объ учебникахъ по другимъ отдѣламъ математики, не исключая даже и учебниковъ по геометріи. Всего требовать отъ учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній невозможно, ибо оно имъ непосильно. Въ особенности непростительно усложнять учебники по ариѳметикѣ, которая проходится въ низшихъ, первыхъ трехъ классахъ среднихъ учебныхъ заведеній, гдѣ ученики мало развиты и еще неспособны къ разсужденіямъ и не обладаютъ при томъ достаточнымъ запасомъ словъ и умѣніемъ скоро составлять надлежащія предложенія для выраженія своихъ мыслей.

Новѣйшіе наши учебники ариѳметики объемисты, многословны съ длинными вступленіями и разсужденіями въ нихъ, которыя учениками не читаются. Опредѣленія дѣйствій приноровлены къ алгебраическимъ очевидно для связи ариѳметики съ алгеброй; но упущено изъ виду, что такія опредѣленія понятны для тѣхъ, которые уже знакомы по крайней мѣрѣ со свойствами этихъ дѣйствій и чиселъ, входящихъ въ нихъ. Ученики почти безсознательно заучиваютъ эти опредѣленія, которыя потомъ скоро забываются, какъ не находящія надлежащаго практическаго примѣненія на практикѣ. Напримѣръ, легко ли ученикамъ примѣнить умноженіе при рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ, когда они знаютъ его опредѣленіе по способу алгебры, а такое опредѣленіе считается самымъ моднымъ въ новѣйшихъ учебникахъ. По этому-то очень часто приходится видѣть умноженіе на именованныя числа разныхъ или одинаковыхъ наименованій со множимыми.

Слишкомъ подробное, а въ особенности еще многословное изложеніе статей элементарной математики и усиленное требованіе отъ учащихся со стороны преподавателей неблагопріятно отзываются на успѣхахъ и здоровьѣ учащихся; нерѣдко это обстоятельство вредно отзывается и на ихъ матеріальномъ положеніи, если по малоуспѣшности приходится имъ оставаться на повторительные курсы въ тѣхъ же классахъ, или выбывать изъ заведенія до окончанія курса. — Объемистые учебники тоже имѣютъ неблагопріятное вліяніе на матеріальное состояніе учащихся, такъ какъ они по необходимости дороги и, слѣдовательно, доступны только состоятельнымъ людямъ.

Нельзя умолчать еще и о томъ, что и сами преподаватели нерѣдко усложняютъ дѣло, прибавляя къ избраннымъ руководствамъ еще отъ себя разныя, по ихъ мнѣнію, улучшенія, какъ-то измѣненіе порядка въ изложеніи, выводы правилъ въ другомъ родѣ, примѣненіе придуманныхъ ими собственныхъ способовъ доказательства теоремъ. Не всегда эти пріемы усваиваются учащимися; напротивъ, часто приходится убѣждаться, что они схвачены только памятью, а потому и примѣняются на практикѣ только механически, — что вовсе нежелательно въ курсѣ математики.

Непосильное изученіе предметовъ, положенныхъ учебными планами, а также и поверхностное ихъ знаніе, замѣчаемое въ послѣднее время, подало поводъ Попечителю Оренбургскаго Учебнаго Округа И. Я. Ростовцеву составить родъ засѣданій, подъ его предсѣдательствомъ, изъ мѣстныхъ педагоговъ для обсужденія по каждому изъ учебныхъ

предметовъ, входящихъ въ кругъ среднихъ учебныхъ заведеній, что слѣдуетъ считать къ курсѣ *существеннымъ*, знаніе котораго обязательно для всякаго ученика при переходѣ его изъ класса въ классъ, или при окончаніи курса. На такихъ засѣданіяхъ обсуждались доклады учителей и вырабатывались, такъ сказать, программы въ поясненіе требованій утвержденныхъ учебныхъ плановъ.—Такими выработанными взглядами на предметъ ограничивался и объемъ курса, а вмѣстѣ съ тѣмъ и объемъ самаго учебника.

Разнообразіе учебниковъ по одному и тому же отдѣлу математики, а также свобода ихъ выбора со стороны преподавателей нарѣдко ставятъ учениковъ въ затруднительное положеніе, на которое преподаватели не обращаютъ вниманія. Желательно не стѣснять преподавателей въ выборѣ учебниковъ, а также и составителей этихъ учебниковъ; но практика заставляетъ поступать иначе. Допустимъ, что подъ руководствомъ опытнаго преподавателя ученики усвоили его пріемы и выводы правилъ; но, по обстоятельствамъ, нѣкоторымъ изъ нихъ приходится перейти въ другое такого же типа учебное заведеніе, въ которомъ преподаватель придерживается другого учебника и примѣняетъ придуманные имъ способы для вывода правилъ, а затѣмъ уже по принятой системѣ соразмѣряетъ свои требованія. Въ какое положеніе ставится ученикъ въ подобномъ случаѣ—легко понять.

Для устраненія и этого неудобства Попечитель И. Я. Ростовцевъ образовалъ коммиссіи, подъ предсѣдательствомъ окружныхъ инспекторовъ, для выбора наиболѣе подходящихъ учебниковъ по всѣмъ предметамъ. Предварительно были затребованы мнѣнія всѣхъ педагогическихъ совѣтовъ всего учебнаго округа, а затѣмъ, по полученіи отъ нихъ отзывовъ объ учебникахъ, въ составленныхъ коммисіяхъ избраны руководства, которыя по большинству собранныхъ отзывовъ, наиболѣе удовлетворяютъ взглядамъ преподавателей. Попечитель рекомендовалъ избранные учебники ввести постепенно въ употребленіе и придерживаться ихъ съ цѣлью достигнуть единства въ преподаваніи, по крайней мѣрѣ въ одномъ учебномъ округѣ. Такимъ образомъ учебно-окружному управленію пришлось нѣкоторымъ образомъ исправить недостатки учебниковъ; но это исправленіе недостаточно, потому что оно касается только одного учебнаго округа: существовавшее неудобство не устранено при переходѣ учениковъ въ заведенія другихъ учебныхъ округовъ. Къ сожалѣнію выборъ учебниковъ для единства преподаванія не распространялся на устраненіе недостатковъ учебниковъ, такъ какъ пришлось дѣлать этотъ выборъ изъ наличныхъ новѣйшихъ учебниковъ съ ихъ недостатками въ педагогическомъ отношеніи. Выбраны по математикѣ преимущественно учебники Киселева, хотя по ариѳметикѣ для низшихъ классовъ этотъ учебникъ нельзя назвать удачнымъ.

Вообще желательно, чтобы были составлены для учениковъ учебники въ самомъ простомъ видѣ, на подобіе конспектовъ, которые бы давали учащимся возможность легко повторить о томъ, что сказано и разъяснено учителемъ на урокѣ. Въ такомъ случаѣ учащимся приходилось бы дома меньше тратить времени на чтеніе повторяемаго урока; имъ легче было бы найти свободный часъ для умственнаго развитія и въ другомъ направленіи, кромѣ математики. Въ особенности необходимы упрощенныя руководства для учениковъ низшихъ классовъ.

Положительно необходимо давать этимъ ученикамъ опредѣленія ариѳметическихъ дѣйствій въ самомъ естественномъ значеніи, а не на основаніи началъ алгебры, такъ какъ начинающіе должны имѣть возможность безъ особенныхъ разсужденій примѣнять данныя опредѣленія къ рѣшенію задачъ, не говоря о томъ, что многимъ приходится на практикѣ довольствоваться только ариѳметическими свѣдѣніями.

б) О биномѣ Ньютона.

Въ № 197 „Вѣстника", въ статьѣ о биномѣ Ньютона Г. Попруженко совершенно справедливо замѣчаетъ, что общеупотребительный и *естественный* выводъ формулы бинома въ нашихъ учебникахъ оказывается мало доступнымъ для учениковъ среднихъ учебныхъ заведеній, такъ какъ основанъ на знаніи теоріи *комбинацій*. Дѣйствительно, по недостатку времени, а главное по спѣшному, можно сказать, выводу формулъ для извѣстныхъ трехъ комбинацій элементовъ, приводимому въ нашихъ учебникахъ, ученики не могутъ достаточно усвоить свойства этихъ комбинацій, а слѣдовательно и самыя формулы схватываются ими наизусть; слѣдовательно и выводъ формулы бинома на основаніи свойствъ комбинацій становится для нихъ неубѣдительнымъ.—Г. Попруженко примѣняетъ къ выводу формулы бинома извѣстное свойство Паскалева треугольника, находя, что тогда выходитъ формула проще. На мой взглядъ примѣненіе въ данномъ случаѣ новаго фигурнаго свойства коэффиціентовъ бинома, а въ особенности въ приложеніи его въ общемъ видѣ, какъ это дѣлаетъ г. Попруженко, не составляетъ облегченія для учащихся, и предлагаемый способъ не можетъ замѣнить съ удобствомъ общепринятый въ учебникахъ. Надобно притомъ замѣтить, что теорія комбинацій введена въ курсъ среднихъ учебныхъ заведеній съ извѣстною, подготовительною цѣлью; примѣненіе же ея къ выводу формулы бинома показываетъ ученикамъ, что она служитъ вспомогательнымъ средствомъ для нахожденія въ нѣкоторыхъ случаяхъ математическихъ выраженій, правилъ, или отвѣтовъ на заданные вопросы. Если устранить этотъ способъ полученія формулы бинома, то комбинаціи останутся безъ крупныхъ примѣненій, исключая рѣшенія подобранныхъ къ данному случаю задачъ. Если не обращать вниманія на вышесказанное употребленіе комбинацій, а позаботиться только о выводѣ формулы бинома, то надобно избѣгать искусственныхъ пріемовъ, а ограничиваться только самыми простыми и наглядными способами.

Мнѣ кажется, что нижеслѣдующій, испытанный мною въ свое время способъ можно признать *естественнымъ* и наиболѣе доступнымъ для учащихся, такъ какъ онъ не требуетъ какихъ либо постороннихъ свойствъ элементовъ, входящихъ въ составъ бинома.

Пусть A и B означаютъ какія либо алгебраическія выраженія, подъ видомъ одночленовъ. Требуется найти формулу разложенія $(A+B)^n$, полагая n цѣлымъ и положительнымъ числомъ*).—Простымъ перемноженіемъ послѣдовательно (A+B) на (A+B) получаемъ:

*) *Примѣчаніе.* При выводы формулы полезно избѣгать употребленія малыхъ буквъ a и b въ $(a+b)^n$, потому что ученики привыкаютъ въ нихъ видѣть только алгебраическія количества и потому въ $(a+b)^n$ предполагаютъ, что возвышается сумма двухъ количествъ въ n-ую степень.

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$$
$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3.$$
$$(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4.$$
$$(A+B)^5=A^5+5A^4B+10A^3B^2+10A^2B^3+5AB^4+B^5.$$
$$(A+B)^6=A^6+6A^5B+15A^4B^2+20A^3B^3+15A^2B^4+6AB^5+B^6$$

и т. д.

. . . .

Разсматривая найденныя формулы, полученныя простымъ помноженіемъ послѣдовательно на $(A+B)$ и потому безспорно вѣрныя, можно подмѣтить въ нихъ слѣдующій общій порядокъ.

1) Первый членъ формулы разложенія равняется первому члену бинома съ показателемъ степени. Послѣдній членъ равняется второму члену бинома съ показателемъ той-же степени.

2) Всѣ прочіе члены формулы состоятъ изъ произведеній членовъ бинома, съ соотвѣтствующими коэффиціентами, въ такомъ порядкѣ, что показатель перваго члена (A) бинома въ каждомъ послѣдующемъ произведеніи на 1 уменьшается, а показатель второго члена (B) на 1 увеличивается, такъ что сумма показателей въ каждомъ членѣ формулъ разложенія постоянна и равняется показателю данной степени бинома. Всѣ члены формулъ *однородны*.

3) Число членовъ въ формулѣ на 1 больше показателя степени бинома.

4) Коэффиціентъ каждаго послѣдующаго члена формулы равняется произведенію изъ коэффиціента предшествующаго члена на показатель уменьшающійся того же члена, раздѣленному на число предшествующихъ членовъ.

5) Коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ начала и конца формулы, одинаковы по виду и величинѣ.

На основаніи подмѣченнаго порядка можно написать формулу въ общемъ видѣ:

$$(A+B)^n=A^n+\frac{n}{1}A^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{1.\,2}A^{n-2}B^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}A^{n-3}B^3+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4}A^{n-4}B^4+\cdots+\frac{n(n-1)}{1.\,2.}A^2B^{n-2}+\frac{n}{1}AB^{n-1}+B^n.\quad(1)$$

Въ этой формулѣ недостаетъ еще такъ называемаго *общаго* члена. Для опредѣленія его вида разсмотримъ ближе видъ каждаго изъ написанныхъ членовъ, начиная главнымъ образомъ съ 3-го.

Во первыхъ, каждый коэффиціентъ состоитъ изъ множителей n, $n-1$, $n-2$... въ числителѣ и изъ произведенія натуральныхъ чиселъ 1, 2, 3... въ знаменателѣ; поэтому достаточно только подмѣтить какимъ множителемъ оканчивается произведеніе въ числителѣ для даннаго числа разложенія и какимъ множителемъ оканчивается произведеніе въ знаменателѣ по отношенію къ порядку членовъ, чтобы умѣть написать и всякій членъ. Изъ приведенной выше формулы видно, что послѣдній

множитель въ числителѣ 3-го члена равняется $(n-1)$, 4-го $(n-2)$, 5-го—$(n-3)$ и т. д., то есть въ послѣднемъ множителѣ изъ n вычитается число, на *2* единицы меньшее порядка искомаго члена. Если, поэтому, отыскивается коэффиціентъ p-го члена по порядку, то легко знать, что послѣдній множитель въ его числителѣ равняется $[n-(p-2)]$. Въ знаменателѣ послѣдній множитель равняется числу на 1 меньше порядка опредѣляемаго члена; слѣдовательно послѣдній множитель знаменателя въ p-мъ членѣ долженъ быть $(p-1)$. Итакъ, коэффиціентъ p-го члена формулы разложенія бинома долженъ быть:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[n-(p-2)]}{1.\;2.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(p-1)}.$$

Во вторыхъ, произведеніе членовъ бинома въ каждомъ членѣ формулы (1) имѣетъ слѣдующій видъ: показатель перваго члена бинома (A) равняется n безъ числа, равнаго послѣднему множителю знаменателя; показатель второго члена бинома (B) равняется послѣднему множителю знаменателя, или иначе такому числу, какое вычитается изъ n въ показателѣ перваго члена. Это произведеніе въ общемъ видѣ можетъ быть написано такъ

$$A^{n-(p-1)}B^{p-1}.$$

Такимъ образомъ *общій* членъ разложенія бинома можетъ быть написанъ такъ:

$$P=\frac{n(n-1)(n-2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;[n-(p-2)]}{1.\;2.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(p-1)}A^{n-(p-1)}B^{p-1}.\quad .\quad .(2)$$

Полная формула тогда можетъ быть такая, какъ (1), съ прибавкой въ промежуткѣ еще члена (2).

Если P дѣйствительно *общій* членъ, то изъ него мы должны получить какіе угодно члены разложенія. Сдѣлаемъ нѣсколько предположеній.

Пусть требуется найти 5-й членъ разложенія бинома $(A+B)^n$. Для сего положимъ $p=5$. Такъ какъ послѣдній множитель числителя въ этомъ случаѣ равняется $(n-3)$, а въ знаменателѣ $p-1=4$; то искомый членъ будетъ

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\;2.\;3.\;4}A^{n-4}B^4.$$

Такого вида членъ дѣйствительно и есть 5-й членъ написаннаго разложенія (1).

Положимъ $p=4$, а $n=6$; то есть найдемъ 4-й членъ разложенія 6-й степени бинома $(A+B)$.

Послѣдній множитель въ числителѣ коэффиціента равняется тогда $(n-2)=4$, а послѣдній множитель знаменателя равняется $(p-1)=3$. Слѣдовательно искомый членъ $(A+B)^6$ будетъ:

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}A^3B^3,\quad \text{или}\quad 20A^3B^3.$$

Такого вида членъ дѣйствительно и есть 4-й въ $(A+B)^6$, какъ видно изъ написанныхъ выше формулъ.

Положимъ $p=n$; тогда общій членъ будетъ:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(n-2)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)}A^{n-(n-1)}B^{n-1}$$

или $$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots(n-1)}AB^{n-1}.$$

По сокращеніи:

$$\frac{n}{1}AB^{n-1}.$$

Такого вида членъ написанъ предпослѣднимъ въ формулѣ (1).

Пусть $p=n+1$. Тогда общій членъ превратится въ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1}{1.\ 2.\ 3\ \ \ldots\ldots(n-1)}A^{0}.B^{n}$$

По сокращеніи же онъ будетъ равенъ B^n. Такой членъ (B^n) равняется послѣднему въ формулѣ (1).

Если положимъ $p=n+2$; то послѣдній множитель въ числителѣ коэффиціента искомаго члена сдѣлается $n-(n+2)-2=0$, а въ знаменателѣ послѣдній множитель обратится въ $(n+1)$, конечную величину; слѣдовательно весь членъ обратится въ нуль. Полагая $p=n+3$, или $n+4$ и т. д. общій членъ P во всѣхъ этихъ случаяхъ получился бы равнымъ нулю, такъ какъ въ числителѣ коэффиціента входилъ бы вездѣ найденный выше множитель$=0$.

Итакъ, общій членъ, удовлетворяя формулѣ (1), вмѣстѣ съ тѣмъ показываетъ, что въ ней больше членовъ быть не можетъ.

Смежные члены съ общимъ можно получить, полагая вмѣсто p величину $(p-1)$, или $(p+1)$. Въ первомъ случаѣ P обратится въ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(p-3)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots(p-2)}A^{n-(p-2)}B^{p-2}\ \ldots (3)$$

а во второмъ въ

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(p-1)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots p}.A^{n-p}B^{p}.\ \ldots (4)$$

Слѣдовательно, въ самомъ общемъ видѣ формула разложенія бинома можетъ быть представлена въ видѣ:

$$(A+B)^n = A^n + \frac{n}{1}A^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}B^2 +$$

$$\ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots[n-(p-2)]}{1.\ 2.\ 3\ldots\ldots\ldots\ldots(p-1)}A^{n-(p-1)}B^{p-1} + \ldots (5)$$

или даже въ символическомъ видѣ

$$(A+B)^n=\sum_{p=n+1}^{p=1}\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-2)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-1)}A^{n-(p-1)}B^{p-1}\ \ldots (6)$$

гдѣ знакъ Σ означаетъ сумму членовъ отъ $p=1$ до $p=n+1$.

Для доказательства справедливости формулы (5), или (6) во всѣхъ случаяхъ, при всякомъ цѣломъ и положительномъ показателѣ степени бинома, примѣнимъ извѣстный пріемъ: положимъ, что формула (5) справедлива для n; докажемъ, что она вѣрна и для $n+1$.

Умножимъ формулу (5), принимаемую за вѣрную при показателѣ n, на $(A+B)$, подобно тому, какъ это дѣлали прежде, при переходѣ, напримѣръ, отъ 4-й степени къ 5-й, или отъ 5-й къ 6-й. Сначала умножимъ всю вторую часть формулы (5) на A, потомъ на B и затѣмъ сдѣлаемъ приведеніе подобныхъ членовъ. Получимъ:

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\frac{n}{1}A^nB+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}A^{n-1}B^2+$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-3)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-2)}A^{n-(p-3)}B^{p-2}+$$

$$+\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-2)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-1)}A^{n-(p-2)}B^{p-1}+$$

$$\ldots\ldots+A^nB+\frac{n}{1}A^{n-1}B^2+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}A^{n-2}B^3+$$

$$\ldots\ldots+\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-3)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-2)}A^{n-(p-2)}B^{p-1}+\ldots$$

Соединяя подобные члены, получимъ

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\frac{(n+1)}{1}A^nB+\left(\frac{n(n-1)}{1.\ 2}+n\right)A^{n-1}B^2+$$

$$+\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\right)A^{n-2}B^3+\cdots+\left(\frac{n(n-1\ldots[n-(p-2)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ (p-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-3)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-2)}\right)A^{n-2}B^{p-1}+\ldots\ldots (7)$$

$$\text{Но}\ \frac{n(n-1)}{1.2}+n=\frac{(n+1)}{1}n;\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}+\frac{n(n-1)}{1.\ 2}$$

$$=\frac{n(n-1)}{1.\ 2}\left(\frac{n-2}{3}+1\right)=\frac{n(n-1)(n+1)}{1.\ 2.\ 3}$$

и т. д.; въ общемъ написанномъ членѣ если взять за скобки

$$\frac{n(n-1)\ \ldots\ldots\ [n-(p-3)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ (p-2)}$$

то въ скобкахъ получится

$$\frac{[n-(p-2)]}{(p-1)}+1=\frac{n+1}{(p-1)}.$$

Поэтому можно написать формулу (7) такъ:

$$(A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\frac{(n+1)}{1}A^{n}B+\frac{(n+1)n}{1.\ 2}A^{n-1}B^{2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.\ 2.\ 3}A^{n-2}B^{3}+$$

$$\ldots\ldots+\frac{(n+1)n(n-1)\ldots[(n+1)-(p-2)]}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots (p-1)}A^{(n+1)-(p-1)}B^{p-1}\ \text{и т. д.} \qquad (8)$$

$$\text{или } (A+B)^{n+1}=A^{n+1}+\left(\frac{n+1}{1}\right)A^{(n+1)-1}B+\frac{(n+1)}{1}\frac{[(n+1)-1]}{2}A^{(n+1)-2}B^{2}+$$

$$+\frac{(n+1)}{1}\frac{[(n+1)-1]}{2}\frac{[(n+1)-2]}{3}A^{(n+1)-3}B^{3}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{(n+1)[(n+1)-1]\ldots\ldots[(n+1)-(p-2)]}{1.\ 2\ \ldots\ldots\ldots\ldots (p-1)}A^{(n+1)-(p-1)}B^{p-1}+\ldots \qquad (9)$$

Откуда видно, что ту же самую формулу (8) можно получить непосредственно изъ (5), полагая вмѣсто n величину $(n+1)$.

Послѣднее заключеніе позволяетъ брать для n какія угодно величины, лишь бы онѣ были только цѣлыя и положительныя.

Посредствомъ общаго члена мы показали, что формула (1) или (5) написана вѣрно. Она въ тоже время показываетъ, что правило коэффиціентовъ и показателей остается то же самое, читать ли формулу съ начала, или съ конца: а это вмѣстѣ съ тѣмъ доказываетъ, что коэффиціенты членовъ, равноудаленныхъ отъ начала и конца формулы, равны между собою, и что величина суммы членовъ этой формулы не измѣнится, если вмѣсто $(A+B)^n$ взять $(B+A)^n$.

Формулы (3) и (4) получены изъ общаго члена непосредственно, полагая $p=1$ и $p+1$ вмѣсто p; но, сравнивая (3) съ общимъ, или (4) съ общимъ можно замѣтить, что коэффиціентъ общаго члена можно бы получить изъ коэффиціента (3), умножая послѣдній на $\frac{n-(p-2)}{(p-1)}$, или коэффиціентъ (4) точно также получить изъ коэффиціента общаго члена, умножая (его) на $\frac{n-(p-1)}{p}$. Числители этихъ множителей означаютъ уменьшающіеся показатели перваго члена бинома, а знаменатели—число предшествующихъ членовъ разложенія. Итакъ вообще, коэффиціентъ всякаго члена получается изъ коэффиціента предшествующаго члена, помножая его на уменьшающійся показатель перваго члена бинома и раздѣляя произведеніе на число предшествующихъ членовъ.

К. Чеховичъ (Оренбургъ).

Примѣчаніе. Въ излагаемой статьѣ написаны нѣкоторыя подробности, о которыхъ можно бы и не говорить; но эта статья должна, приблизительно, охарактеризовать, какъ должно быть изложено на урокахъ, если примѣнить ее на практикѣ—какъ впрочемъ и было мною примѣняемо.

ПИСЬМА ВЪ РЕДАКЦІЮ.

Милостивый Государь
Господинъ Редакторъ!

Я получилъ обстоятельное и вполнѣ удовлетворительное разъясненіе поразившаго меня факта, что имя мое было публично произнесено въ связи съ рецензіей „Методики физики“ проф. Ѳ. Н. Шведова.

Такимъ образомъ падаютъ соотвѣтствующія мѣста моего предыдущаго заявленія *).

Примите и пр.

Спб. 6 янв. 1895 г. Проф. *О. Хвольсонъ.*

Милостивый Государь
Господинъ Редакторъ!

Позвольте просить Васъ удѣлить мѣсто въ „Вѣстникѣ Опытной Физики“ нижеслѣдующему разъясненію касательно письма проф. О. Д. Хвольсона въ № 202 „В. О. Ф.“.

Въ засѣданіи педагогическаго отдѣленія Новороссійскаго Общества естествоиспытателей 16-го декабря 1894 г., въ концѣ преній, продолжавшихся *три часа* и въ которыхъ я принималъ главное участіе, я, желая противопоставить мнѣнію моего противника, Э. К. Шпачинскаго, мнѣніе заимствованное мною у проф. Хвольсона, перепуталъ эти фамиліи и сдѣлалъ это въ такой мѣрѣ невольно, что самъ замѣтилъ свою ошибку только послѣ того, когда присутствующіе обратили на нее мое вниманіе.

Въ виду того, что я тотчасъ же *двукратно* выразилъ сожалѣніе о своей обмолвкѣ, я, думалъ, что инцидентъ не можетъ имѣть дальнѣйшихъ послѣдствій. Однако оказывается, что слухъ объ этомъ инцидентѣ проникъ въ печать и при томъ съ оттѣнкомъ неблагопріятнымъ какъ для меня, такъ и для уважаемаго профессора Хвольсона. Въ виду этого считаю долгомъ заявить печатно, что имя этого почтеннаго ученаго или иного профессора физики уже потому не могло быть приводимо мною въ какую либо связь съ извѣстной анонимной рецензіей, что авторъ послѣдней, какъ я указалъ въ другомъ мѣстѣ, не имѣетъ даже понятія о томъ, что̀ значитъ *передача силы* на разстояніе.

Полагая, что этимъ инцидентъ долженъ быть вполнѣ покончень, прошу Васъ принять и пр.

13 янв. 1895 г. *Ѳ. Шведовъ.*

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики“, № 202, стр. 234.

ПО ПОВОДУ МОЕЙ РЕЦЕНЗІИ.

Въ заключеніе этой корреспонденціи, мнѣ приходится выяснить еще два пункта: 1) почему рецензія моя была подписана псевдонимомъ „Безличнаго" и 2) почему возраженія на нее автора „Методики физики" я оставляю теперь безъ отвѣта.

1. Давъ мѣсто на страницахъ моего журнала „Введенію въ Методику физики" профессора Шведова безъ какихъ бы то ни было редакціонныхъ оговорокъ, не взирая на то, что мои *личныя* воззрѣнія на задачу такой методики не позволяли мнѣ одобрить этого „Введенія" съ начала до конца, я выжидалъ почти въ теченіе года появленія какихъ либо отзывовъ въ печати какъ о новыхъ опредѣленіяхъ основныхъ физическихъ понятій, рекомендованныхъ авторомъ, такъ и объ его планѣ коренной реформы преподаванія физики въ средне-учебныхъ заведеніяхъ. Отъ имени редакціи я приглашалъ даже сотрудниковъ „Вѣстника" высказаться по этому вопросу, казавшемуся мнѣ весьма серьезнымъ. Однакожъ, никто изъ нихъ приглашеніемъ такимъ воспользоваться не пожелалъ, а между тѣмъ „Методика" проф. Шведова, какъ новинка, стала пріобрѣтать—какъ мнѣ хорошо было извѣстно—поклонниковъ въ тѣхъ школьныхъ сферахъ, гдѣ еще очень силенъ авторитетъ профессорскаго титула. Не только нѣкоторые ученики, прочитавшіе кое что изъ брошюры проф. Шведова, стали съ болѣе явнымъ пренебреженіемъ относиться къ своимъ учебникамъ физики, находя ихъ устарѣлыми и никуда негодными, но нашлись, къ сожалѣнію, и преподаватели, коихъ подкупила не лишенная остроумія и оригинальности схоластическая система автора. Повторяю, мнѣ это было извѣстно, благодаря сношеніямъ редакціи со многими учебными заведеніями, частнымъ письмамъ и разговорамъ. Для меня стало яснымъ, что „Методика" проф. Шведова, стремящаяся вернуть физику назадъ, къ эпохѣ господства узко-субъективныхъ воззрѣній на природу, можетъ принести при дальнѣйшемъ своемъ развитіи положительный вредъ въ нашей учебной литературѣ, главнымъ образомъ потому что написана *профессоромъ*, т. е. лицомъ, пользующимся съ оффиціальной точки зрѣнія непогрѣшимостью въ вопросахъ своей спеціальности.

Чтобы парализовать такое вліяніе и дать время одуматься подпавшимъ уже подъ него, я считалъ лучшимъ средствомъ насмѣшку и прибѣгнулъ къ такому средству сознательно въ своей рецензіи, не смотря на уваженіе, какое питалъ и питаю къ личности автора зловредной брошюрки... Съ другой стороны, не претендуя самъ въ этомъ вопросѣ на непогрѣшимость, я не считалъ себя вправѣ, какъ редакторъ „Вѣстника", лишать автора „Методики" возможности отвѣтить — если онъ считаетъ это нужнымъ—на мои нападки на страницахъ того же „Вѣстника", и потому, и только потому, я счелъ за умѣстное скрыть до поры до времени имя автора непріятной рецензіи подъ псевдонимомъ „Безличнаго", предвидя, что въ противномъ случаѣ проф. Шведовъ, если приметъ мою критику за личную обиду, не пожелаетъ передать мнѣ же своего отвѣта для напечатанія въ моемъ же журналѣ. Конечно, я не могъ предвидѣть инцидента съ проф. Хвольсономъ, передъ которымъ извиняюсь въ невольномъ причиненіи ему непріятности,

такъ же какъ не могъ предвидѣть вообще и того, что послѣ появленія моей анонимной рецензіи будутъ больше интересоваться и додумываться, *кто* ее написалъ, нежели тѣмъ, *что* въ ней написано.

2. Я потому и считаю не нужнымъ отвѣчать теперь проф. Шведову, что въ своей статьѣ, помѣщенной въ № 202 „Вѣстника", онъ слишкомъ много говоритъ лично обо мнѣ и слишкомъ мало о своей „Методикѣ" и указанныхъ мною ея ошибкахъ. Профессоръ Ланге тоже, повидимому, больше интересуется вопросомъ о томъ, что *я думаю*, нежели тѣмъ, что напечаталъ проф. Шведовъ въ своей „Методикѣ", которой, тѣмъ не менѣе, онъ заявилъ себя такимъ горячимъ защитникомъ въ публичномъ засѣданіи Одесскаго Физ.-Мат. Общ. 16 дек. 1894 г. На такую солидарность пріемовъ и философскихъ воззрѣній двухъ профессоровъ Новороссійскаго университета мнѣ рѣшительно нечего отвѣтить. Притомъ авторъ „Методики", какъ видно изъ его отвѣта, настолько еще раздраженъ, что о хладнокровномъ обсужденіи затронутыхъ имъ же вопросовъ теперь не можетъ быть еще рѣчи. Будемъ ждать, поэтому, дальнѣйшаго ихъ разъясненія въ обѣщанныхъ выпускахъ самой „Методики". Быть можетъ къ тому времени авторъ ея или согласится съ нами, что въ неодушевленной природѣ есть только *одинъ* дѣятель, который принято пока называть *энергіею*, или же—если захочетъ настаивать на своемъ,—дастъ намъ какія нибудь болѣе вѣсскія нежели до сихъ поръ доказательства своихъ положеній, будто къ числу *дѣятелей* необходимо отнести въ физикѣ инертную *матерію* и несуществующія въ дѣйствительности *силы*.

Безличный (Э. К. Шпачинскій).

ЗАДАЧИ.

№ 138. Даны двѣ концентрическія окружности O и внѣшняя точка A. Провести радіусъ $OXУ$ (X и $У$ на окружностяхъ) такъ, чтобы $\angle XAУ$ былъ данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 139. Даны двѣ концентрическія окружности O и внѣшняя точка B. Провести между окружностями отрѣзокъ $XУ$ опредѣленной длины такъ, чтобы $\angle XBУ$ былъ данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 140. Безъ помощи тригонометріи рѣшить слѣдующую задачу (изъ „Собранія вопросовъ и задачъ прямолинейной тригонометріи" Верещагина, изд. 2, № 653):

„Вычислить острые углы такого прямоугольнаго треугольника, площадь котораго $p = \frac{1}{2}$ площади правильнаго треугольника, построеннаго на гипотенузѣ".

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 141. Показать, что синусы и тангенсы угловъ не могутъ составлять ни ариѳметической ни геометрической прогрессіи, если углы составляютъ ариѳметическую прогрессію.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 142. Рѣшить уравненіе:

$$4(\cos^6 x - \sin^6 x) - 3(\cos^4 x - \sin^4 x) - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0.$$

И. Ок—чъ (с. Голле).

№ 143. Высоту корридора измѣрили слѣдующимъ образомъ: отмѣривъ разстояніе c отъ стѣны AB, помѣстили тамъ источникъ свѣта на высотѣ h отъ пола, а далѣе, на разстояніи k отъ источника свѣта и нѣсколько ниже его, поставили зеркальце, вращавшееся на горизонтальной оси, которая находилась на высотѣ b отъ пола. Отражающая поверхность зеркальца была обращена въ сторону стѣны AB, а основанія источника свѣта и зеркальца находились на одной прямой, перпендикулярной къ стѣнѣ AB. Когда плоскость зеркальца составляла $\angle \varphi$ съ его вертикальной подставкой, на пересѣченіи потолка корридора со стѣной AB появилось свѣтлое пятно. Найти высоту корридора.

А. Бачинскій (Холмъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 55 (3 сер.). Тяжелый прутъ, составляющій уголъ α съ горизонтомъ, упирается однимъ изъ своихъ концовъ въ точкѣ O (фиг. 53), вокругъ которой онъ можетъ свободно вращаться. Другой его конецъ поддерживается шнуркомъ AB, прикрѣпленнымъ въ точкѣ B, расположенной на одной вертикали съ точкой O. Называя OB черезъ h, длину OA прута черезъ l, а вѣсъ его черезъ P, вычислить силу, натягивающую веревку.

Фиг. 53.

Замѣнивъ силу P, приложенную къ серединѣ прута (предполагая, что этотъ послѣдній однороденъ, прямолинеенъ и имѣетъ вездѣ одно и то-же поперечное сѣченіе) силою $p = P/2$, приложенной въ точкѣ A, разложимъ силу p на силу q, дѣйствующую по направленію BA, и на силу r, дѣйствующую по направленію AO. Тогда очевидно

$$\frac{q}{p} = \frac{2q}{P} = \frac{AB}{h} = \frac{\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl.\sin\alpha}}{h}$$

откуда

$$q = \frac{P}{2h}\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl.\sin\alpha}.$$

Я. Блюмбергъ (Рига); *А. Варенцовъ* (Шуя).

№ 56 (3 сер.). Показать, что если

$$\frac{1}{2}\sin x . \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} z,$$

то

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Представивъ данное выраженіе въ видѣ:

$$\frac{\sin^2 x}{2\cos x} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}},$$

получимъ:

$$\frac{2\cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{z}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{z}{2}},$$

или

$$\sin^2 x . \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} + 4\cos x . \operatorname{tg}\frac{z}{2} - \sin^2 x = 0.$$

Рѣшая это уравненіе относительно $\operatorname{tg}\frac{z}{2}$: находимъ:

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \frac{-4\cos x \pm \sqrt{16\cos^2 x + 4\sin^4 x}}{2\sin^2 x} = \frac{-2\cos \pm (1+\cos^2 x)}{\sin^2 x}.$$

Изъ даннаго равенства слѣдуетъ, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ передъ скобками въ числителѣ послѣдняго выраженія возможенъ лишь знакъ $+$. Тогда

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)^2 = (\operatorname{tg}\frac{x}{2})^2.$$

И. Барковскій (Могилевъ); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *С. Бабанская* (Тифлисъ); *А. Варенцовъ* (Шуя); *П. Ивановъ* (Одесса); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 57 (3 сер.). Показать, что

$$e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3...n},$$

гдѣ n есть цѣлое число, а e основаніе неперовыхъ логариѳмовъ.

Очевидно, что при n цѣломъ и положительномъ выраженіе

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + \frac{1}{n^n}$$

меньше, нежели e, или

$$e . n^n > (1+n)^n.$$

Полагая въ этомъ выраженіи n послѣдовательно равнымъ 1,2,3,...n и перемножая полученныя равенства, найдемъ:

$$1. 2. 3 \ldots\ldots n . e^n > (1+n)^n,$$

или

$$e^n > \frac{(1+n)^n}{(n)!}.$$

Я. Блюмбергъ (Рига); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка).

№ 64 (3 сер.). Показать, что при a цѣломъ уравненіе

$$x^3 - y^3 = 3a$$

не имѣетъ цѣлыхъ рѣшеній, если a не есть кратное трехъ.

Представивъ данное уравненіе въ видѣ:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = 3a,$$

легко видѣть, что либо $x-y$, либо x^2+xy+y^2 есть число, кратное трехъ. Пусть $x-y=3k$, гдѣ k есть цѣлое число. Тогда

$$x^2+xy+y^2 = (y+3k)^2 + (y+3k)y + y^2 = 3y^2 + 9ky + 9k^2,$$

т. е. также дѣлится на 3, а потому и a необходимо должно быть числомъ, кратнымъ трехъ.

Пусть $x^2+xy+y^2 = 3m$, гдѣ m есть цѣлое число. Тогда

$$(x-y)^2 = 3(m-xy),$$

т. е. и $x-y$ дѣлится на 3, а потому a необходимо должно быть числомъ, кратнымъ трехъ.

С. Д—цевъ (Москва); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 66 (3 сер.). Безъ помощи логариѳмовъ рѣшить систему

$$\frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} = -2; \quad \operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

при $x < y < 360°$.

Изъ перваго уравненія находимъ:

$$-2 = \frac{\cos\frac{x-y}{2}}{\cos\frac{x+y}{2}} = \frac{\operatorname{ctg}{}^x/_2 \, . \operatorname{ctg}{}^y/_2 + 1}{\operatorname{ctg}{}^x/_2 \, . \operatorname{ctg}{}^y/_2 - 1},$$

откуда

$$\operatorname{ctg}{}^x/_2 \, . \operatorname{ctg}{}^y/_2 = {}^1/_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (1)$$

Второе изъ данныхъ уравненій даетъ:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2 {}^x/_2 - 1}{2\operatorname{ctg}{}^x/_2} + \frac{\operatorname{ctg}^2 {}^y/_2 - 1}{2\operatorname{ctg}{}^y/_2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

откуда

$$4\operatorname{ctg}{}^x/_2 \, . \operatorname{ctg}{}^y/_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}{}^x/_2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}{}^y/_2,$$

или на основаніи уравненія (1):

$$\operatorname{ctg}{}^x/_2 + \operatorname{ctg}{}^y/_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (2)$$

Изъ уравненій (1) и (2) слѣдуетъ, что $\operatorname{ctg}{}^x/_2$ и $\operatorname{ctg}{}^y/_2$ суть корни уравненія:

$$z^2+\frac{2}{\sqrt{3}}z+\frac{1}{3}=0,$$

$$\text{откуда } z=-\frac{1}{\sqrt{3}}=\operatorname{ctg}{}^x/_2=\operatorname{ctg}{}^y/_2.$$

Поэтому общее рѣшенie есть:

$$x=m.\ 360^\circ+240^\circ,\ y=n.\ 360^\circ+240^\circ.$$

Условiю $x<y<360^\circ$ удовлетворяютъ значенiя:

$$x=-120^\circ,\ y=240^\circ.$$

Я. Блюмбергъ (Рига); *Макаровъ* (Сарапулъ); *А. Варенцовъ* (Шуя); *Н. Кокушинъ* (Олонецъ); *П. Ивановъ* (Одесса).

72 (3 сер.). Показать, что углы четыреугольника могутъ составить ариѳметическую прогрессiю только въ двухъ случаяхъ: 1) если четыреугольникъ есть трапецiя: 2) если около четыреугольника можно описать кругъ.

Пусть A есть меньшiй уголъ четыреугольника, а r—разность прогрессiи. Тогда остальные углы будутъ: $A+r$, $A+2r$, $A+3r$.

Такъ какъ сумма внутреннихъ угловъ четыреугольника=360°, то

$$2A+3r=180^\circ.$$

Очевидно, что если углы A и $A+3r$ лежатъ при одной сторонѣ, то четыреугольникъ есть трапецiя, если же уголъ A противолежитъ углу $A+3r$, то около четыреугольника можно описать кругъ.

П. X. (Тула); *П. Ивановъ* (Одесса); *С. Д—цевъ* (Москва); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *Д. Татариновъ* (Троицкъ).

№ 590 (2 сер.). Рѣшить систему:

$$ax^m+by^n+az^p=a_1,$$
$$b_1x^{2m}+b_0y^{2n}+b_1z^{2p}=a_2,$$
$$b_2x^m z^p=cy^{2n}.$$

Пусть $x^m=u$, $y^n=t$, $z^p=s$. Тогда данная система можетъ быть написана такъ:

$$a(u+s)+bt=a_1, \quad \ldots\ldots (1)$$
$$b_1(u^2+s^2)+b_0t^2=a_2, \quad \ldots\ldots (2)$$
$$b_2us=\mathrm{c}t^2. \quad \ldots\ldots (3)$$

Опредѣливъ $u+s$ изъ уравненiя (1), а us изъ уравненiя (3), можемъ уравненiе (2) написать въ такомъ видѣ:

$$b_1\left[\left(\frac{a_1-bt}{a}\right)^2-\frac{2ct^2}{b^2}\right]+b_0t^2=a_2.$$

Отсюда опредѣлимъ $t=y^n$. Дальнѣйшее рѣшенiе не представляетъ затрудненiй.

Я. Тепляковъ (Радомысль); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *П. Ивановъ* (Одесса).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскiй.

Дозволено цензурою. Одесса, 21-го Января 1895 г.
„Центральная типо-литографiя“, уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

Рѣш. $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}, \; x_1 = 1, \; x_2 = 3;$

$$k_n = 4k_{n-1} - k_{n-2}, \; k_1 = 1, \; k_2 = 5.$$

332. *Рѣшить въ цѣлыхъ числахъ ур-ніе*

$$8x^2 - 5 = 3y^2.$$

Рѣш. $x_{2n+1} = 5x_{2n} - 2x_{2n-1}, \; y_{2n+1} = 3y_{2n} - 2y_{2n-1},$

$$x_{2n} = \tfrac{1}{2}(5x_{2n-1} - x_{n-2}), \; y_{2n} = \tfrac{1}{2}(5y_{2n-1} - y_{2n-2});$$

$$x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; y_1 = 1, \; y_2 = 3.$$

Correspondance. Examens. Bibliographie.

Questions proposées. №№ 562, 563.

Д. Е.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІИ.

Варавва, М. Краткій курсъ естественной исторіи. Составл. согласно съ утвержденной г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія учебною программою для городскихъ училищъ. Курсъ 1-го и 2-го года. Со многими политипажами въ текстѣ. Изд. 7-е, исправл. и дополненное. Москва. 1894. Ц. 1 р. 50 к.

Гольдгаммеръ, Д. А. Памяти учителя. A. Kundt. 9-го (21-го) мая 1894 года. Казань. 1894.

Жуковъ, Николай. Примѣненіе электричества. Электрометаллургія и обработка металловъ электрическимъ токомъ. (Теорія электролиза. Раффинировка металловъ. Электролитическая обработка руды. Электрическая плавка. Пайка, и проч.). Съ 110 чертежами и таблицами въ текстѣ. Сост. по иностраннымъ руководствамъ и привилегіямъ. Изд. книжн. склада П. Прянишникова. Москва. 1895. Ц. 3 р., съ перес. 3 р. 50 к.

Комаровъ, А. Ф. Ариѳметическій задачникъ для начальныхъ городскихъ и сельскихъ училищъ. Выпускъ II. Задачи, примѣры и вопросы на числа свыше сотни и на простѣйшія дроби. Изд. 3-е, книжн. магазина К. Тихомирова. Москва. 1894. Ц. 20 к.

Малининъ, А. Курсъ физики для женскихъ учебныхъ заведеній. Изд. 8-е книжн. магазина В. Думнова. Москва. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

Марковъ, А. А. О псевдоэллиптическихъ интегралахъ вида $\int \frac{x\,dx}{(x^3 + c)\sqrt{x^3 + d}}$. Спб. 1894.

Покровскій, К. Путеводитель по небу. Практическое руководство къ астрономическимъ наблюденіямъ невооруженнымъ глазомъ и малой трубой. Съ 4 картами звѣзднаго неба, картой луны и 64 рисунками. Изд. П. Прянишникова. Москва. 1894. Ц. 2 р.

Ярковскій, И. О., инж.-техн. Строеніе матеріи и молекулярныя силы. Москва. 1894. Ц. 1 р. 25 к.

Старковъ, А. П. 300-лѣтіе изобрѣтенія логариѳмовъ (1594 - 1894). Сообщеніе, сдѣланное въ засѣданіи Мат. Отд. Новоросс. Общ. Естествоисп. 7-го октября 1894 г. Одесса. 1894.

Фулье, Альфредъ. Декартъ. Перев. съ франц. А. П. Татариновой. Москва. 1894. Ц. 80 коп.

Химическая лабораторія Спб. университета. Спб. 1894.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Химія.

Chemistry. Part 1, Inorganic. 12mo. (Edinburgh, Livingstone) pp. 64, 1 s. net. Part 2, Inorganic and Organic. 12mo. (Edinburgh, Livingstone). pp. 64. (Catechism Series). Simpkin. 1 s. net.

Kelly, *E.* The Alchemical Writtings of. Translated from the Hamburg Edition of 1676, and edited with a Biographical Preface. Cr. 8vo. J. Elliott. 7 s. 6 d. net.

Leffmann, *H.* and *Beam*, *W.* Analysis of Milk and Milk Products. Cr. 8vo. Paul. 5 s.

Mills, *J.* Chemistry for Students. 305 Illustrations. 12mo. pp. 286. Low. 3 s. 6 d.

Muir, *M. M. P.* The Chemistry of Fire. Post 8vo. pp. 170. (University Extension Series). Methuen. 2 s. 6 d.

Roscoe, Sir *H.*, and *Hunt*, *J.* Inorganic Chemistry for Beginners. With 108 Illustrations in the text. 12mo. pp. 246. Macmillan. 2 s. 6 d.

Valentin, *W. G.* A Course of Practical Chemistry, or Qualitative Chemical Analysis. Edited and revised by W. R. Hodgkinson. 8th. edit. 8vo. pp. 340. Ghurchill. 8 s. 6 d.

Wootton, *H.* Problems in Chemical Physics and Specific Gravities. With Answers. 3rd edit. post 8vo. pp. 68. Simpkin. 2 s.

Baker, *M. N.* Sewage Purification in America: a Description of the Municipal Sewage Purification Plants in the United States and Canada. Illustrated. 16mo. (New-York) London. Sewed, 4 s. 6 d.

Horwill, *E. E.* A Course of Qualitative Chemical Analysis in Inorganic and Organic Chemistry, especially adapted to the requirements of the Science and Art Department, the University, and other Examinations. 12mo. pp. 192. (Blackie's Science Series). Blackie. 2 s.

Valentin, *W. G.* Qualitative Analysis Tables. Revised by W. R. Hodgkinson. 8th. edit. 8vo. pp. 39. Churchill. 2 s. 6 d.

Bloxam, *C. L.* Laboratory Teaching; or, Progressive Exercises in Practical Chemistry. Edited by A. G. Bloxam. 6th. edit. post 8vo. pp. 330. Churchill. 6 s. 6 d.

Letts, *E. A.* Qualitative Analysis Tables, on the Reactions of certain Organic Substances. 4to. Macmillan. 7s. net.

Wright, *C. R. A.* Animal and Vegetable Fixed Oils, Fats, Butters, and Waxes: their Preparation and Properties, and the Manufacture of Candles, Soaps, and other Products. With 144 Illustrations. 8vo. pp. 578. Griffin. 28 s.

Brown, *A. M.* The Animal Alkaloids: Cadaveric and Vital. With Introduction by Professor Armand Gautier. 3rd edit. 8vo. pp. 260. Kempton. 7s. 6 d.

Thudichum, *J. L. M.* A Treatise on Wines: their Origin, Nature, and Varieties. With Practical Directions for Viticulture and Vinification. Post 8vo. pp. 390. Bell & S. 6 s.

Johnston's Elements of Agricultural Chemistry. From the edition by Sir Charles A. Cameron, revised and in great part re-written by C. M. Aixman. 17th edit. post 8vo. pp. 500. Black woods. 6 s. 6 d.

Clowes, *F.* and *Coleman*, *J. B.* Quantitative Chemical Analysls: adapted for use in the Laboratories of Colleges and Schools. 2nd. edit. post 8vo. pp. 472. Churchill. 8 s. 6 d.

Muir, *M. M. P.* The Alchemical Essence and the Chemical Element; an Episode in the Quest of the Unchanging. 8vo. Longmans. 4s. 6 d.

Thorpe, *T. E.* Essays in Historical Chemistry. Post 8vo. pp. 378. Macmillan. 8s. 6 d. net.

Austen, *W. C. Roberts*. An Introduction to the Study of Metallurgy. 3rd edit. revised and enlarged. 8vo. pp. 402. Griffin. 12 s. 6 d.

Behrens, *H.* A Manual of Micro-Chemical Analysis. With an Introductory Chapter by Professor John W. Judd. With 84 Illustrations drawn by the Author. Post 8vo. pp. 264. Macmillan. 6 s.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1894. — № 7.

Notes sur la géométrie du triangle. Par M. *E. Lemoine.* Пусть

$$x\cos\delta_i + y\sin\delta_i - p_i = 0, \ (i = 1, 2, 3)$$

суть ур-нія сторонъ тр-ка ABC, описаннаго около эллипса

$$\frac{x^2}{X^2} + \frac{y^2}{Y^2} = 1. \qquad (1)$$

По свойству эллипса имѣемъ:

$$p_i^2 = X^2\cos^2\delta_i + Y^2\sin^2\delta_i = X^2 - (X^2 - Y^2)\sin^2\delta_i;$$

отсюда

$$\sin\delta_i = \sqrt{\frac{X^2 - P_i^2}{X^2 - Y^2}}, \ (i = 1, 2, 3).$$

Подставивъ эти выраженія въ тожество:

$$\sin\delta_1 \sin(\delta_2 - \delta_3) + \sin\delta_2 \sin(\delta_3 - \delta_1) + \sin\delta_3 \sin(\delta_1 - \delta_2) = 0$$

и замѣтивъ, что углы $\delta_1 - \delta_2$, $\delta_2 - \delta_3$, $\delta_3 - \delta_1$ суть дополнительные для угловъ тр-ка ABC, получимъ ур-ніе для опредѣленія X:

$$\sin A \sqrt{X^2 - p_1^2} + \sin B \sqrt{X^2 - p_2^2} + \sin C \sqrt{X^2 - p_3^2} = 0.$$

или

$$a\sqrt{X^2 - p_1^2} + b\sqrt{X^2 - p_2^2} + c\sqrt{X^2 - p_3^2} = 0, \qquad (I)$$

гдѣ a, b, c суть стороны тр-ка ABC.

Подобнымъ образомъ, если p'_1, δ'_1, p'_2, δ'_2, p'_3, δ'_3 суть полярныя координаты вершинъ тр-ка ABC, вписаннаго въ эллипсъ (1), то

$$\frac{p'^2_i \cos^2\delta'_i}{X^2} + \frac{p'^2_i \sin^2\delta'_i}{Y^2} = 1, \text{ или } \frac{1}{X^2} + \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{X^2}\right)\sin^2\delta'_i = \frac{1}{p'^2_i};$$

опредѣливъ отсюда $\sin\delta'_i$ и замѣтивъ, что

$$p'_1 p'_2 \sin(\delta'_1 - \delta'_2) = cp_3, \ . \ . \ . \ .$$

изъ того же тожества получимъ ур-ніе

$$ap_1\sqrt{X^2 - p'^2_1} + bp_2\sqrt{X^2 - p'^2_2} + cp_3\sqrt{X^2 - p'^2_3} = 0. \qquad (II)$$

Ур-нія (I) и (II) найдены *Serret*; по освобожденіи отъ радикаловъ они приводятся къ весьма сложнымъ биквадратнымъ уравненіямъ. *M. Lemoine* примѣняетъ эти ур-нія къ нѣкоторымъ частнымъ случаямъ и, пользуясь методомъ *непрерывнаго преобразованія* формулъ (transformation continue) *), получаетъ слѣдующіе результаты:

---

*) См. Обз. J. E. („Вѣстн.“ XIV сем. № 11).

1) Если центръ эллипса, описаннаго около тр-ка, совпадаетъ съ центромъ вписаннаго въ него круга, то квадраты полуосей эллипса суть

$$2R(R-r \pm d)$$

гдѣ r и R суть радіусы круговъ вписаннаго и описаннаго около тр-ка, а d—разстояніе между ихъ центрами.

2) Если центръ эллипса, вписаннаго въ тр-къ, совпадаетъ съ центромъ описаннаго около него круга, то полуоси эллипса суть:

$$\frac{1}{2} R \left(1 \pm \sqrt{1-8 \cos A . \cos B . \cos C}\right).$$

3) Если центръ элипса, вписаннаго въ тр-къ, совпадаетъ съ центромъ круга девяти точекъ, то полуоси эллипса суть:

$$\frac{1}{2} R \text{ и } R \sqrt{2 \cos A . \cos B . \cos C}.$$

Sur la transversale d'un triangle. Par *J. Wasteels.* На сторонахъ тр-ка BC, AB, CA возьмемъ точки D, E, F и обозначимъ черезъ G пересѣченіе прямыхъ AD и EF. Пусть

$$BD = m,\ DC = n,\ \frac{BE}{EA} = r,\ \frac{CF}{FA} = r',\ \frac{DG}{GA} = R.$$

Проведя черезъ B и C параллели къ DA, пересѣкающія EF въ K и L, изъ трапеціи BCLK получимъ:

$$n.BK + m.LC = (m+n).DG, \text{ или}$$

$$n.\frac{BK}{AG} + m\frac{LC}{AG} = (m+n)\frac{DG}{AG};$$

но

$$\frac{BK}{AG} = \frac{BE}{EA} = r,\ \frac{LC}{AG} = \frac{CF}{FA} = r';$$

слѣдовательно

$$n.r + m.r' = (m+n).R.$$

Un problème sur les courbes gauches. Par. *M. Balitrand.* При точкѣ M нѣкоторой кривой (M) построимъ трегранный уголъ, ребрами котораго служатъ касательная MX, главная нормаль MY и бинормаль MZ (trièdre principale); на нормали My, составляющей уголъ ϑ съ главной нормалью, отложимъ отрѣзокъ $MM_1 = l$; требуется найти условіе, при которомъ прямая MM_1 становится бинормалью кривой (M_1).

Проведя $Mz \perp$ плоск. XMy и обозначивъ черезъ x, y, z координаты какой нибудь точки относительно перемѣннаго трегграннаго угла, авторъ рѣшаетъ задачу исходя изъ ур-ній:

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} + 1 + \frac{1}{\varrho}(z\sin\vartheta - y\cos\vartheta),$$

$$\frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x\cos\vartheta}{\varrho} + z\left(\frac{1}{\varrho} - \vartheta'\right).$$

$$\frac{\delta z}{ds} = \frac{dz}{ds} - \frac{x\sin\vartheta}{\varrho} - y\left(\frac{1}{r} - \vartheta'\right),$$

гдѣ ϱ и r суть радіусы кривизны и завитія кривой. Изъ этихъ ур-ній на основаніи условій задачи получается и самое условіе

$$\frac{l}{r^2} + \frac{l\cos^2\vartheta}{\varrho^2} - \frac{\cos\vartheta}{\varrho} = 0.$$

Кривая M_1 опредѣляется ф-ми:

$$ds_1 = \sqrt{1 - \frac{l\cos\vartheta}{\varrho}} \cdot ds,$$